# Dossier n°5 : Exemples d'étude de situations faisant intervenir la notion de probabilité conditionnelle.

*Rédigé par Cécile COURTOIS, le 25 août 2003.*
*cecile-courtois@wanadoo.fr*

## I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des probabilités commence dans les classes de Première S et ES où les élèves étudient entre autres :

- la définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini ;
- la probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'évènements ;
- la modélisation d'expériences aléatoires de référence.

L'étude des probabilités se poursuit en Terminale avec notamment :

- la notion de conditionnement ;
- la formule des probabilités totales ;
- l'introduction des combinaisons.

Je choisis donc de situer ce dossier en Terminale S et ES.

## II Commentaires généraux.

### II.1 A propos du sujet.

Les élèves ayant acquis les rudiments du calcul probabiliste en classe de Première, on remarque qu'au cours de certaines expériences aléatoires, il peut être intéressant de connaître la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé et de comparer de telles probabilités.

De là découle la définition suivante :

***Définition 1 :***

**Soit A un évènement de l'ensemble E des issues possibles tel que $p(A) \neq 0$. On définit sur E une nouvelle probabilité $p_A$ en posant, pour tout événement B :**

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}.$$

**$p_A$ est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé et on note $p_A(B) = p(B\backslash A)$ : « probabilité de B sachant A ».**

Le but de ce dossier est donc de présenter des applications de la notion de probabilité conditionnelle à partir de différentes situations.

### II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter cinq exercices permettant chacun d'illustrer une application différente des probabilités conditionnelles :

- l'exercice n°1 est une application de la formule des probabilités totales ;
- l'exercice n°2 propose le calcul de probabilités des causes (ou encore application de la formule de Bayes) ;
- l'exercice n°3 propose le calcul de probabilités par le calcul de probabilités conditionnelles ;
- l'exercice n°4 permet d'étudier une suite de probabilités ;
- l'exercice n°5 est un exemple de loi de stabilité génétique.

On utilisera notamment à plusieurs reprises la formule des probabilités totales que je vous rappelle :

***Formule des probabilités totales :***

**Soient $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ des évènements de probabilités non nulle réalisant une partition de E. Alors, pour tout événement B :**

$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} p(B / A_k) p(A_k)$$

# III Présentation des exercices.

## III.1 Exercice n°1.

*But :* Utiliser la formule des probabilités totales pour répondre à une contrainte dans un atelier.

*Méthode :*

- Travailler sur un exemple numérique ;
- Résoudre une inéquation.

*Outils :*

Formule des probabilités totales.

## III.2 Exercice n°2.

*But :* Juger la fiabilité d'une alarme.

*Méthode :* Retrouver la formule de Bayes.

*Outils :*

- $p_A$ est une probabilité ;
- si $p(A) \neq 0$, $p(B \cap A) = p(B \backslash A) p(A)$ ;
- formule des probabilités totales.

## III.3 Exercice n°3.

*But :* Calculer une probabilité conditionnelle avec deux conditionnements qu'on est tenté de croire identiques.

*Outils :*

- Définition 1 ;
- Combinaisons.

## III.4 Exercice n°4.

*But :* Etudier la limite d'une suite de probabilités.

*Méthode :*

- Exprimer $p_n$ en fonction de $p_{n-1}$ ;
- Etudier la suite.

*Outils :*

- Formule des probabilités totales ;
- Suites géométriques.

## III.5 Exercice n°5.

*But :* Montrer une application des probabilités conditionnelles à la génétique en étudiant la loi de stabilité génétique lors d'appariements au hasard.

*Méthode :*

- Faire un tableau pour déterminer la descendance de la génération initiale ;
- Calculer les proportions des divers génotypes dans cette descendance.
- Etablir la stabilité des génotypes à la première génération.

*Outils :*

Formule des probabilités totales

# IV Enoncés et références des exercices.

## IV.1 Exercice n°1 (n°22 p 291, Transmath TES 2002).

Dans un atelier, une machine A coupe, chaque jour, 500 plaques d'acier dont 3% sont rejetées car leur longueur ne convient pas. On lui adjoint une machine B qui, chaque jour, coupe 400 plaques dont 9% sont rejetées.

1. On prend une plaque au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rejetée ?
2. On veut que la probabilité de rejet d'une plaque soit inférieure à 0,05. Quel nombre maximal de plaques peut-on couper avec la machine B sachant que la machine A coupe toujours 500 plaques par jour ?

## IV.2 Exercice n°2 (n°3 p 279, Terracher TS 2002).

Un système d'alarme fonctionne de la façon suivante :

- s'il y a danger, la probabilité que l'alarme se déclenche est 0,99 ;
- en l'absence de danger, elle se déclenche avec une probabilité de 0,005 .

La probabilité qu'un danger se présente est 0,001. L'alarme se déclenche ; quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

## IV.3 Exercice n°3 (n°30 p 277, Transmath TS 2002).

Un joueur prend au hasard deux cartes parmi l'as de trêfle, l'as de pique, la dame de carreau et le roi de cœur.

1. Le joueur annonce « J'ai un as.». Quelle est alors la probabilité qu'il ait les deux as ?
2. Le joueur annonce : « J'ai l'as de trêfle ». Quelle est alors la probabilité qu'il ait les deux as ?

## IV.4 Exercice n°4 (n°87 p 288, Transmath TS 2002).

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
$A_n$ : « Alice atteint la cible au n-ième coup »
$B_n$ : « Alice rate la cible au n-ième coup ».
On pose $p_n = p(A_n)$.

1. Déterminer $p_1$ et démontrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique.

Préciser son premier $u_1$ et sa raison q.

4. Ecrire $u_n$ puis $p_n$ en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

## IV.5 Exercice n°5 ( n°76 p 285, Transmath TS 2002).

Etant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est homozygote lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est hétérozygote lorsqu'elle est de génotype Aa.

Une population (génération 0) est composée d'individus de génotypes AA, Aa et aa dans des proportions $p_0$, $q_0$ et $r_0$.

Un couple d'individus de cette population donne naissance à un individu dont le génotype est constitué d'un gène pris au hasard dans le génotype de chacun des parents (par exemple, si les parents sont de génotype AA et aa, les descendants auront pour génotype Aa).

1. Etudier l génotype de la descendance (à la première génération) de tous les couples de parents possibles.
2. Les couples se forment au hasard. On appelle $p_1$, $q_1$ et $r_1$ les proportions d'individus de génotypes AA, Aa et aa de la première génération.

   a) Vérifier que $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$ et $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

   b) Vérifier que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$. On note $\alpha = p_0 - r_0$.

   c) Calculer $p_1$, $q_1$ et $r_1$ en fonction de $\alpha$. En déduire $p_2$, $q_2$ et $r_2$. Conclure.

## V Commentaires.

a) Il faudrait certainement, pour avoir le temps de faire une préparation correcte, éliminer un de ces exercices mais je n'ai pas réussi à en trouver un moins intéressant que les autres, alors je vous laisse faire ce choix (si on a toutefois bien préparé ce dossier dans l'année, il doit être possible de présenter les cinq exercices).

b) Le cinquième exercice permet de présenter l'intérêt des probabilités conditionnelles dans un domaine extérieur aux mathématiques. On met en particulier en évidence, dans la configuration donnée, la stabilité des génotypes à partir de la première descendance.

c) Le quatrième exercice permet en particulier l'étude d'une suite arithmético-géométrique.